

7. Pandit P., Tahiliani S. AgileUAT: A Framework for User Acceptance Testing based on User Stories and Acceptance Criteria. *International Journal of Computer Applications*. 2018. Vol. 120. № 10. P. 16–21.

8. The Standish Group International. Rule of ten. URL: https://www.standishgroup.com/sample_research_files/RuleTen.pdf.

9. What Is User Story And Acceptance Criteria (Examples). URL: <https://www.softwaretestinghelp.com/user-story-acceptance-criteria/>.

10. Пышкин Е.В. Проблемы автоматизации приемочного тестирования программного обеспечения при использовании подхода «разработка, управляемая описанием поведения». *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика, телекоммуникации и управление*. 2012. №6 (162). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/problemy-avtomatizatsii-priemochno-go-testirovaniya-programmnogo-obespecheniya-pri-ispolzovanii-podhoda-razrabotka-upravlyayemaya>.

Статтю подано до редакції 05.11.2020

УДК:519.218

DOI 10.33111/mise.100.10

Круглова Н. В., к.ф.-м.н., доцент,
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей,
Диховичний О. О., к.ф.-м.н., доцент,
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей
Дем'яненко О. О., к.ф.-м.н., доцент,
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей,
НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

Kruglova N. V., PhD (physical and mathematical sciences),
Associated professor of Mathematical analysis and
Probability Theory Department
Dykhovychnyi O. O., PhD (physical and mathematical sciences),
Associated professor of Mathematical analysis and
Probability Theory Department
Demianenko O. O., PhD (physical and mathematical sciences),
Associated professor of Mathematical analysis and
Probability Theory Department
NTUU «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

**ПРО ОЦІНКИ ТОЧНОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ
ЗВУЖЕННЯ БРОУНІВСЬКОГО ЛИСТА
НА ЧАСТИНУ КОЛА В ПРОСТОРИ H_{SP}**

**ON ESTIMATES OF MODELING ACCURACY
FOR BROWNIAN SHEET'S RESTRICTION
ON THE PART OF A CIRCLE IN SPACE H_{SP}**

Анотация. У роботі узагальнено результати, отримані у роботах Параньяпа, Парка, Клесова, Круглової, Диховичної (Paranjape, Park, Klesov, Kruglova, Dykhovychnyi). Зокрема, знайдено найбільш точну апроксимацію розподілу максимуму звуження (restriction) поля Ченцова (Chentsov field, Brownian sheet в англomовній літературі) на частину кола. Потреба у розгляді подібних задач пов'язана із дослідженням таких фізичних явищ, як перколяція (percolation) (протікання) та фільтрація (filtration). Оскільки знаходження точного розподілу вказаного максимуму є проблематичним, авторами запропоновано розв'язання цієї задачі шляхом чисельного моделювання (simulation) відповідного випадкового процесу. Для цього у статті розроблено новий алгоритм моделювання гауссівського процесу $Y(t)$ з нульовим математичним сподіванням і коваріаційною функцією спеціального виду: $E[Y(s)Y(t)] = u(\min\{s, t\})v(\max\{s, t\})$, $s, t \in [0, 1]$. Цей алгоритм має високу швидкість (high speed), потрібність у якій зумовлена великою кількістю точок розбиття траєкторії процесу. Доведено, що усі моменти, а, отже, й скінченновимірні (finite-dimensional) розподіли змодельованого процесу збігаються до відповідних характеристик процесу $Y(t)$. Запропоновано новий спосіб параметризації звуження поля Ченцова на чверть кола. На підставі цього способу параметризації процесу $Y(t)$ новий алгоритм моделювання застосовано для моделювання звуження поля Ченцова на частину кола. Знайдено асимптотику похибки моделювання у просторі H_{sp} . Доведено, що норма похибки у просторі H_{sp} спадає як $O(1/\sqrt{N})$, де N — кількість точок моделювання. Для перевірки якості алгоритму проведено порівняння емпіричних оцінок основних статистичних характеристик змодельованого й теоретичного процесів, та підтверджено їхній збіг. Для змодельованого процесу знайдено емпіричний розподіл максимуму процесу, для якого підібрано найближчий теоретичний розподіл. Як найприйнятніший розподіл обрано розподіл Вейбулла (Weibull), що підтверджено критерієм Колмогорова, а також Q-Q та P-P діаграмами. Моделювання виконано в середовищі програмування R.

Ключові слова: Броунівський лист; поле Ченцова; випадкове поле; перколяція; гауссівський процес; розподіл максимуму; моделювання; мова R.

Annotation. In this paper, we generalize the results obtained by Paranjape, Park, Klesov, Kruglova, Dykhovychnyi. In particular, we find the most precise approximation of the distribution of the maximum of Chentsov field (Brownian sheet) restricted to a part of a circle. The need for such an approximation comes from modeling physical phenomena like percolation and filtration. Since finding the exact distribution is problematic, we propose a numerical solution to the problem by performing a simulation of the corresponding stochastic process. For this purpose, we develop a novel algorithm to model a Gaussian process $Y(t)$ with zero mean and the special covariance function $E[Y(s)Y(t)] = u(\min\{s, t\})v(\max\{s, t\})$, $s, t \in [0, 1]$. The proposed algorithm has high computational efficiency, which is crucial when the number of points partitioning the process's trajectory is large. We prove that all moments as well as finite-dimensional distributions of the modeled process converge to the corresponding characteristics of the process $Y(t)$. We propose a new way to parameterize a Chentsov field on a quarter of a circle. This parameterization of the process $Y(t)$ is utilized to model a restriction of the Chentsov field on a part of a circle. Also, we determine asymptotic behavior of the model error in H_{sp} space. We prove that the norm of the error in this space is $O(1/\sqrt{N})$, where N is the number of modeled points. We verify the proposed algorithm's correctness by comparing obtained empirical estimates of the distribution of maximum with the theoretical ones and show that they coincide. We obtain an empirical distribution of maximum of the modeled process and find its best theoretical approximation, which turns out to be the Weibull distribution. This is verified with Kolmogorov

criterion as well as Q-Q and P-P diagrams. All simulations are performed in R statistical computing environment.

Key words: *Brownian sheet; Chentsov field; random field; percolation; Gaussian process; distribution of the maximum; simulation; R language.*

Постановка проблеми у загальному вигляді. У різноманітних теоретичних і прикладних задачах часто виникає необхідність знаходити розподіли функціоналів від гауссівських процесів і полів. Для випадкових полів актуальною є задача знаходження точних розподілів функціоналів типу максимуму звуження полів на множини розмірності меншої розмірності поля. У загальному вигляді для броунівського листа ця задача ще не є розв'язаною. Лише для певних частинних випадків звуження броунівського листа на криві можна знайти точні розподіли максимуму.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. С. Парк і С. Праньяп [1], І.І. Клесов [2] дослідили задачу знаходження максимуму двовимірного броунівського листа на ламані з однією точкою злому, а О.І. Клесов і Н.В. Круглова [3] отримали аналогічний результат для ламаних з кількома точками злому.

Виділення невирішеної раніше частини загальної проблеми. Оскільки точних виразів для розподілів максимумів від гауссівських процесів у загальному випадку немає, то можливим способом знаходження таких розподілів є, на думку авторів, моделювання відповідних гауссівських процесів. Як засіб розв'язання цієї проблеми в [4, 5] запропоновано комп'ютерне моделювання траєкторії випадкового процесу, який є відповідним звуженням поля на ламані лінії. Для моделювання в [4] було розроблено відповідний алгоритм, який ґрунтується на спеціальному вигляді коваріаційної функції досліджуваного процесу та перетворенні Дуба [6]. За змодельованим процесом можна знайти емпіричний розподіл максимуму й підібрати найближчий ймовірнісний розподіл.

Формулювання цілей. Побудова алгоритму істотно залежить від конкретного вигляду кривої та способу параметризації. У даній роботі запропонована нова параметризація, а, отже, й новий алгоритм моделювання. У зв'язку з цим постає актуальне питання збіжності змодельованого процесу до теоретичного, а також точності наближення. При цьому актуальним є порівняння теоретичних та емпіричних характеристик змодельованого та теоретичного процесів, а саме, середнього та коваріаційної функції.

Викладення основного матеріалу досліджень

1. Теоретичні відомості. Скористаємось означенням [7]. Відмітимо, що в літературі можна зустріти ще одну назву для двовимірного броунівського листа — поле Ченцова.

Означення 1. Гауссівське дійсне сепарабельне поле $X(s, t)$ буде двовимірним броунівським листом, якщо воно задовольняє такі умови:

1. $X(0, t) = X(s, 0) = 0$ для $\forall s, t \in [0, 1]$;
2. $E[X(s, t)] = 0$ для $\forall (s, t) \in [0, 1]^2$;
3. $E[X(s_1, t_1)X(s_2, t_2)] = \min\{s_1, s_2\} \min\{t_1, t_2\}$ для всіх (s_1, t_1) і $(s_2, t_2) \in [0, 1]^2$.

Означення 2. Позначимо H_{SP} [8] Гільбертів простір випадкових процесів $x(t), t \in [0, K]$ з нормою $\|x(t)\|_{SP} = \sqrt{\int_0^K E[x^2(t)] dt}$.

Лема (Перетворення Дуба) [6]. Нехай гауссівський процес $Y(t)$ з нульовим математичним сподіванням має таку коваріаційну функцію: $R_Y(s, t) = E[Y(s)Y(t)] = u(s)v(t)$, $s \leq t$, що функція $\frac{u(t)}{v(t)}$ зро-

стає та неперервна, тоді процеси $Y \left(u \left(\left(\frac{u(t)}{v(t)} \right)^{-1} \right) \right) / v \left(\left(\frac{u(t)}{v(t)} \right)^{-1} \right)$ і вінерівський процес — стохастично еквівалентні.

2. Побудова моделі процесу. Нехай задано гауссівський процес $Y(t), t \in [0, 1]$, з $E[Y(t)] = 0, t \in [0, 1]$, і коваріаційною функцією $R_Y(s, t) = u(s)v(t)$, $s \leq t$, $s, t \in [0, 1]$, де $u(\cdot)$ — неперервна зростаюча функція, $v(\cdot)$ — неперервна спадна функція. Використавши перетворення Дуба [6], можна стверджувати, що процес $Y(t)$ і процес $v(t) w \left(\frac{u(t)}{v(t)} \right)$ стохастично еквівалентні.

Розіб'ємо інтервал $[0, 1]$ на N рівних частин.

Введемо позначення: $a(t) = \frac{u(t)}{v(t)}$, $t_n^N = \frac{n}{N}$, $n = \overline{1, N-1}$.

$$S_N(t_n^N) = v(t_n^N) \sum_{i=1}^n \xi_i \sqrt{a(t_i^N) - a(t_{i-1}^N)},$$

де $\xi_i, i = \overline{1, N-1}$, — незалежні однаково розподілені стандартні гауссівські величини.

Теорема 1. Нехай дано процес $Y(t)$, описаний вище. Введемо процес

$$S_N(t) = S_N(t_n^N), t \in [t_n^N, t_{n+1}^N), n = \overline{1, N-1}. \quad (I)$$

Тоді процес $S_N(t)$ збігається за розподілом до процесу $Y(t)$ на $[0, 1]$. **Доведення.**

Знайдемо математичне сподівання, дисперсію і коваріаційну функцію процесу $S_N(t)$.

$$\begin{aligned} E[S_N(t)] &= E\left[v(t_n^N) \sum_{i=1}^n \xi_i \sqrt{a(t_i^N) - a(t_{i-1}^N)}\right] = \\ &= v(t_n^N) \sum_{i=1}^n \sqrt{a(t_i^N) - a(t_{i-1}^N)} E[\xi_i] = 0, \\ t &\in [t_n^N, t_{n+1}^N), n = \overline{1, N-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[S_N^2(t)] &= E\left[\left(v\left(\frac{[Nt]}{N}\right) \sum_{i=1}^{[Nt]} \xi_i \sqrt{a(t_i^N) - a(t_{i-1}^N)}\right)^2\right] = \\ &= v^2\left(\frac{[Nt]}{N}\right) \sum_{i=1}^{[Nt]} \left(a(t_i^N) - a(t_{i-1}^N)\right) E[\xi_i^2] = \\ &= v^2\left(\frac{[Nt]}{N}\right) \cdot \frac{u\left(\frac{[Nt]}{N}\right)}{v\left(\frac{[Nt]}{N}\right)} = u\left(\frac{[Nt]}{N}\right) v\left(\frac{[Nt]}{N}\right). \end{aligned}$$

Оскільки $u(\cdot)$ — неперервна зростаюча функція, $v(\cdot)$ — неперервна спадна функція, то

$$\begin{aligned} f_N(t, t) &= u\left(\frac{Nt}{N}\right) v\left(\frac{(N+1)t}{N}\right) < u\left(\frac{[Nt]}{N}\right) v\left(\frac{[Nt]}{N}\right) < g_N(t, t), \\ g_N(t, t) &= u\left(\frac{(N+1)t}{N}\right) v\left(\frac{Nt}{N}\right). \end{aligned}$$

Очевидно, що $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(t, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(t, t) = u(t)v(t)$.

$$\text{Тоді } u\left(\frac{[Nt]}{N}\right)v\left(\frac{[Nt]}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} u(t)v(t) = R_Y(t, t).$$

$$\text{Нехай } s \in [t_k^N, t_{k+1}^N), t \in [t_n^N, t_{n+1}^N), k \leq n.$$

$$\begin{aligned} E[S_N(s)S_N(t)] &= \\ &= E\left[\left(v\left(\frac{[Ns]}{N}\right)\sum_{i=1}^{[Ns]}\xi_i\sqrt{a(t_i^N)-a(t_{i-1}^N)}\right)\times\right. \\ &\quad \left.\times\left(v\left(\frac{[Nt]}{N}\right)\sum_{j=1}^{[Nt]}\xi_j\sqrt{a(t_j^N)-a(t_{j-1}^N)}\right)\right] = \\ &= v\left(\frac{[Ns]}{N}\right)v\left(\frac{[Nt]}{N}\right)\sum_{i=1}^{[Ns]}\left(a(t_i^N)-a(t_{i-1}^N)\right)E[\xi_i^2] = \\ &= v\left(\frac{[Ns]}{N}\right)v\left(\frac{[Nt]}{N}\right)\cdot\frac{u\left(\frac{[Ns]}{N}\right)}{v\left(\frac{[Ns]}{N}\right)} = u\left(\frac{[Ns]}{N}\right)v\left(\frac{[Nt]}{N}\right). \\ f_N(s, t) &= u\left(\frac{Ns}{N}\right)v\left(\frac{(N+1)t}{N}\right) < u\left(\frac{[Ns]}{N}\right)v\left(\frac{[Nt]}{N}\right) < g_N(s, t), \\ g_N(s, t) &= u\left(\frac{(N+1)s}{N}\right)v\left(\frac{Nt}{N}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Очевидно, що } \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(s, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(s, t) = u(s)v(t).$$

$$\text{Тоді } u\left(\frac{[Ns]}{N}\right)v\left(\frac{[Nt]}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} u(s)v(t) = R_Y(s, t).$$

Отже, математичне сподівання, дисперсія, коваріаційна функція процесу $S_N(t)$ збігаються до відповідних характеристик процесу $Y(t)$. Тоді, в силу гасовості процесів, скінченновимірні розподіли $S_N(t)$ слабо збігаються до відповідних розподілів процесу $Y(t)$.

3. Моделювання звуження броунівського листа на криві. Розглянемо звуження поля Ченцова на чверть кола. Змоделюємо даний процес за допомогою алгоритму, описаному в [4]. Але для більшої точності моделювання введемо нову параметризацію кривої, на яку звужуємо процес.

$$L = \left\{ (x, y) \middle| x = \cos t, y = \sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right\}. \quad (2)$$

Тоді процес $X_t = X(\cos t, \sin t)$, буде звуженням двопараметричного броунівського листа на криву L . Згідно перетворення Дуба [6] процес $Y(t) = \cos tw(tgt)$ буде стохастично еквівалентний процесу X_L . Згідно алгоритму, описаному вище, для процесу X_t , побудуємо модель. Перепишемо (1) у термінах індикаторів відповідно до вигляду кривої:

$$S_N(t) = \sum_{n=1}^{N-1} v(t_n^N) \sum_{i=1}^n \xi_i \sqrt{a(t_i^N) - a(t_{i-1}^N)} I_{[t_n^N, t_{n+1}^N)}(t), \quad (3)$$

де $v(t) = \cos t$, $u(t) = \sin t$, $a(t) = \frac{u(t)}{v(t)} = tgt$.

Теорема 2. Нехай $X_L(t)$ — звуженням двопараметричного броунівського листа на криву L , задану рівнянням (2).

$S_N(t)$ — модель процесу $X_L(t)$, задана формулою (3). Тоді

$$\|X_L(t) - S_N(t)\|_{SP} = \frac{\pi}{\sqrt{2N}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \|X_L(t) - S_N(t)\|_{SP}^2 &= \int_0^{\pi/2} E[(X_L(t) - S_N(t))^2] dt = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} E(v(t)w(a(t)) - v(t_{i-1})w(a(t_{i-1})))^2 dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} E \left(v(t)w(a(t)) - v(t_{i-1})w(a(t)) + v(t_{i-1})w(a(t)) - \right. \\
&\quad \left. - v(t_{i-1})w(a(t_{i-1})) \right)^2 dt = \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left((v(t) - v(t_{i-1}))^2 a(t) + 2(v(t) - v(t_{i-1}))v(t_{i-1})(a(t) - a(t_{i-1})) + \right. \\
&\quad \left. + v^2(t_{i-1})(a(t) - a(t_{i-1}))) \right) dt = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left((v^2(t) - 2v(t)v(t_{i-1}) + v^2(t_{i-1}))a(t) + \right. \\
&\quad \left. + 2v(t)v(t_{i-1})a(t) - 2v^2(t_{i-1})a(t) - 2v(t)v(t_{i-1})a(t_{i-1}) + 2v^2(t_{i-1})a(t_{i-1}) + \right. \\
&\quad \left. + v^2(t_{i-1})a(t) - v^2(t_{i-1})a(t_{i-1}) \right) = \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(v^2(t)a(t) + v^2(t_{i-1})a(t_{i-1}) - 2v(t_{i-1})v(t)a(t_{i-1}) \right) dt = \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(v(t)u(t) + v(t_{i-1})u(t_{i-1}) - 2v(t)u(t_{i-1}) \right) dt = \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{2} \sin 2t_{i-1} - 2 \cos t \sin t_{i-1} \right) dt = \\
&= \sum_{i=1}^N \left(-\frac{1}{4} \cos 2t + \frac{t}{2} \sin \frac{2\pi(i-1)}{2N} - 2 \sin t \sin \frac{\pi(i-1)}{2N} \right) \bigg|_{\frac{\pi(i-1)}{2N}}^{\frac{\pi i}{2N}} = \\
&= \sum_{i=1}^N \left(-\frac{1}{4} \cos \frac{\pi i}{N} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi(i-1)}{N} + \frac{\pi}{4N} \sin \frac{\pi(i-1)}{N} - \right. \\
&\quad \left. - 2 \sin \frac{\pi(i-1)}{2N} \sin \frac{\pi(i-1)}{2N} + 2 \sin^2 \frac{\pi(i-1)}{2N} \right).
\end{aligned}$$

Розіб'ємо останню суму на 4 частини. І порахуємо їх окремо.

$$1) \sum_{i=1}^N \left(-\frac{1}{4} \cos \frac{\pi i}{N} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi(i-1)}{N} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{N} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{N} - \frac{1}{4} \cos \pi = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{\pi}{4N} \sum_{i=1}^N \sin \frac{\pi(i-1)}{N} &= \frac{\pi}{4N} \frac{\sin \frac{\pi}{2N}}{\sin \frac{\pi}{2N}} \sum_{i=1}^{N-1} \sin \frac{\pi i}{N} = \\ &= \frac{\pi}{8N \sin \frac{\pi}{2N}} \left(\cos \frac{\pi}{2N} - \cos \frac{3\pi}{2N} + \cos \frac{3\pi}{2N} - \cos \frac{5\pi}{2N} + \dots + \cos \frac{(2N-3)\pi}{2N} - \right. \\ &\quad \left. - \cos \frac{(2N-1)\pi}{2N} \right) = \frac{\pi}{8N \sin \frac{\pi}{2N}} \left(\cos \frac{\pi}{2N} - \cos \frac{(2N-1)\pi}{2N} \right) = \frac{\pi}{4N} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2N}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) A &= -2 \sum_{i=1}^N \sin \frac{\pi(i-1)}{N} \sin \frac{\pi i}{N} = -2 \sum_{i=2}^N \sin \frac{\pi(i-1)}{N} \sin \frac{\pi i}{N} = \\ &= \sum_{i=2}^N \left(\cos \frac{\pi(2i-1)}{2N} - \cos \frac{\pi}{2N} \right) \end{aligned}$$

$$a) -\sum_{i=2}^N \cos \frac{\pi}{2N} = -(N-1) \cos \frac{\pi}{2N}.$$

$$\begin{aligned} b) B &= \cos \frac{\pi}{2N} + \cos \frac{2\pi}{2N} + \dots + \cos \frac{(2N-1)\pi}{2N} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{4N}} \left(-\sin \frac{\pi}{4N} + \sin \frac{3\pi}{4N} - \sin \frac{3\pi}{4N} + \dots + \sin \frac{(4N-1)\pi}{4N} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{4N}} \left(-\sin \frac{\pi}{4N} + \sin \frac{\pi}{4N} \right) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \cos \frac{2\pi}{2N} + \cos \frac{4\pi}{2N} + \dots + \cos \frac{(2N-2)\pi}{2N} = \\ &= \cos \frac{\pi}{N} + \cos \frac{2\pi}{N} + \dots + \cos \frac{(N-1)\pi}{N} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2N}} \left(-\sin \frac{\pi}{2N} + \sin \frac{3\pi}{2N} - \sin \frac{3\pi}{2N} + \dots + \sin \frac{(2N-1)\pi}{2N} \right) = 0.$$

$$\sum_{i=2}^N \cos \frac{\pi(2i-1)}{2N} = B - C - \cos \frac{\pi}{2N} = -\cos \frac{\pi}{2N}.$$

$$A = -\cos \frac{\pi}{2N} - (N-1) \cos \frac{\pi}{2N} = -N \cos \frac{\pi}{2N}.$$

$$4) \sum_{i=1}^N 2 \sin^2 \frac{\pi(i-1)}{2N} = \sum_{i=1}^{N-1} \left(1 - \cos \frac{\pi i}{N} \right) = N-1 - \sum_{i=1}^{N-1} \cos \frac{\pi i}{N} = N-1.$$

$$\int_0^{\pi/2} E \left[(Y(t) - S_N(t))^2 \right] dt = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4N} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2N} - N \cos \frac{\pi}{2N} + N-1.$$

$$N - N \cos \frac{\pi}{2N} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} N \cdot \frac{\pi^2}{2N^2} = \frac{\pi^2}{2N}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\pi}{4N} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2N} - \frac{1}{2} \right)}{\left(\frac{1}{N} \right)^k} = \left| \frac{\pi}{2N} = x \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\operatorname{tg} x} - 1 \right)}{\left(\frac{2}{\pi} x \right)^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi^k (x - \operatorname{tg} x)}{2^{k+1} x^{k+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi^k \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x} \right)}{2^{k+1} (k+1) x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi^k \left(\frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x} \right)}{2^{k+1} (k+1) x^k} = -\frac{\pi^2}{24}, k=2.$$

$$\text{Отже, } \|X_L(t) - S_N\|_{SP} = \frac{\pi}{\sqrt{2N}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

4. Перевірка якості моделювання. Перевіримо коректність проведеного моделювання. Для цього знайдемо емпіричні оцінки математичного сподівання, дисперсії і коваріаційної функції даного процесу. Побудуємо теоретичні і емпіричні характеристики процесу.

У [5] як приклад роботи алгоритму розглядалася крива (2), але в іншій параметризації:

$$L = \left\{ (x, y) \mid y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [0, 1] \right\}. \quad (4)$$

Змоделюємо 10000 реалізацій процесу, використовуючи цю параметризацію і середовище R [9]. Побудуємо графіки для математичного сподівання, дисперсійної функції моделі і процесу (рис. 1 і 2).

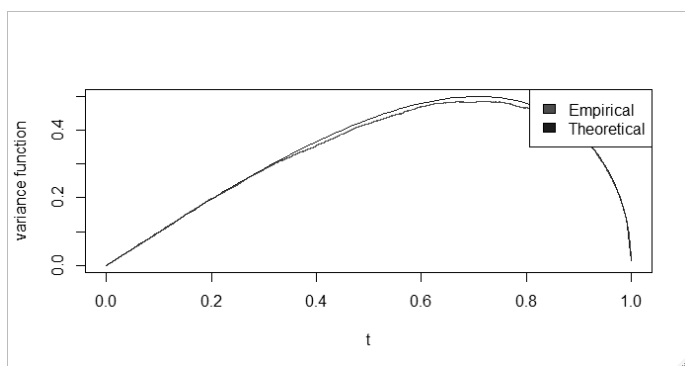


Рис. 1. Дисперсії процесу

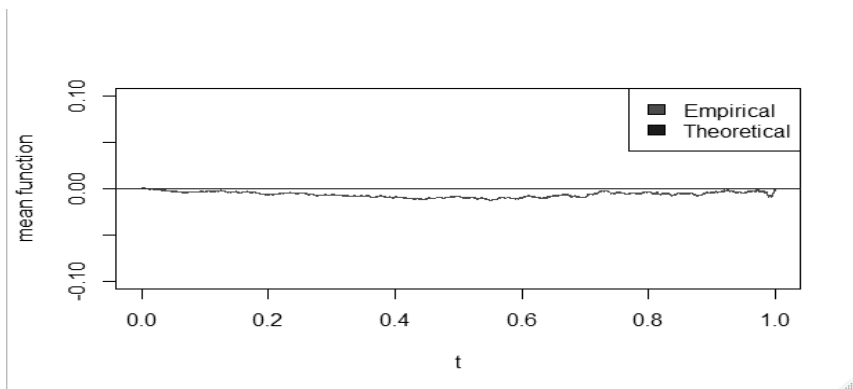


Рис. 2. Математичні сподівання

Прог.1. Фрагмент коду в середовищі R.

```
mt<-numeric(10^4)
dt<-numeric(10^4)
x<-numeric(10^8)
a<-matrix(x,nrow=10^4)
t<-seq(0,1-1/10000,length.out=10000)
vt<-sqrt(1-t^2)
at<-t/sqrt(1-t^2)
D<-diff(at)
for(i in 1:10^4){
  a[i,]<-vt*c(0,cumsum(rnorm(9999,0,sqrt(D))))
}
mt<-colMeans(a)
plot(t,mt,col="red",type="l",xlab="t",ylab="mean
function",ylim=c(-0.1,0.1))
abline(a=0,b=0,col="blue")
legend("topright",c("Empirical",
"Theoretical"),fill=c("red","blue"))
mtm<-matrix(rep(mt,10^4),nrow=10^4,byrow=T)
Dt<-colMeans((a)^2)
plot(t,Dt,col="red",type="l",xlab="t",ylab="variance func-
tion" ylim=c(0,0.5))
curve(t*sqrt(1-t^2),col="blue",add=T,xname="t")
legend("topright",c("Empirical",
"Theoretical"),fill=c("red","blue"))
```

Тепер змодельємо процес, змінивши параметризацію кривої згідно рівняння (2) (рис 3 і 4).

Прог.2.

```
mt<-numeric(10^4)
dt<-numeric(10^4)
x<-numeric(10^8)
a<-matrix(x,nrow=10^4)
t<-seq(0,pi/2-pi/20000,length.out=10000)
vt<-cos(t)
at<-tan(t)
D<-diff(at)
for(i in 1:10^4){
  a[i,]<-vt*c(0,cumsum(rnorm(9999,0,sqrt(D))))
}
mt<-colMeans(a)
plot(t,mt,col="red",type="l",xlab="t",ylab="mean
function",ylim=c(-0.1,0.1))
abline(a=0,b=0,col="blue")
legend("topright",c("Empirical",
"Theoretical"),fill=c("red","blue"))
mtm<-matrix(rep(mt,10^4),nrow=10^4,byrow=T)
Dt<-colMeans((a)^2)
plot(t,Dt,col="red",type="l",xlab="t",ylab="variance
function",ylim=c(0,0.5))
curve(sin(2*t)/2,col="blue",add=T,xname="t")
legend("topright",c("Empirical",
"Theoretical"),fill=c("red","blue"))
```

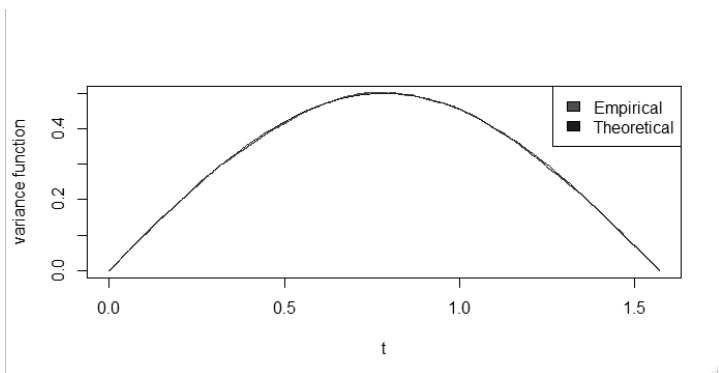


Рис. 3. Дисперсії процесу

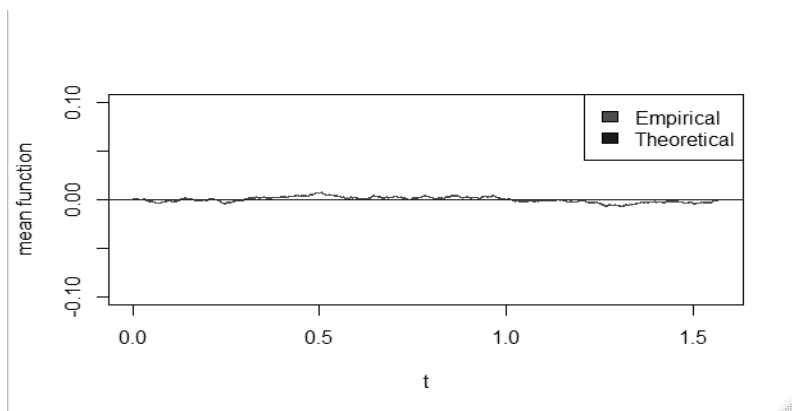


Рис. 4. Математичні сподівання

Як видно з побудованих графіків, емпіричні оцінки середнього і дисперсії змодельованого процесу практично співпадають з теоретичними.

5. Знаходження розподілу максимуму. Знайдемо емпіричний розподіл максимуму від змодельованого процесу. Для цього змодельуємо процес і визначимо вибірки з його максимумів. Порівняємо емпіричний розподіл максимуму з розподілами Вейбула, Гумбеля, Фреше на основі побудови гістограми, емпіричної функції розподілу та з використанням Р-Р, Q-Q діаграм і критерію Колмогорова-Смірнова. Проаналізувавши графіки в емпіричних функцій розподілу гістограм, а також Р-Р, Q-Q діаграми, найприйнятнішим виявився розподіл Вейбулла з параметрами:

shape=1.7636305, scale=0.8793867, що й підтверджено тестом Колмогорова-Смирнова (p-value = **0.6542**). На рис. 5 зображено результати для розподілу Вейбула, який ми можемо прийняти за теоретичний розподіл максимуму звуження броунівського листа на чверть кола.

Зауважимо, що це узгоджується з результатами, представленими в [10].

Прог. 3.

```
Ma<-numeric(10^4)
t<-seq(0,pi/2-1/1000,length.out=1000)
vt<-cos(t)
at<-tan(t)
D<-diff(at)
for(i in 1:10^4){
  y<-vt*c(0,cumsum(rnorm(999,0,sqrt(D))))
  Ma[i]<-max(y)
}
library(fitdistrplus)
ocinka<-mledist(Ma[Ma>0],"weibull",lower = c(0, 0))
plotdist(Ma[Ma>0], "weibull",
para=list(shape=ocinka$estimate[1],
scale=ocinka$estimate[2]))
ks.test(unique(Ma[Ma>0]), "pweibull", shape=ocinka$estimate
[1], scale=ocinka$estimate[2])
```

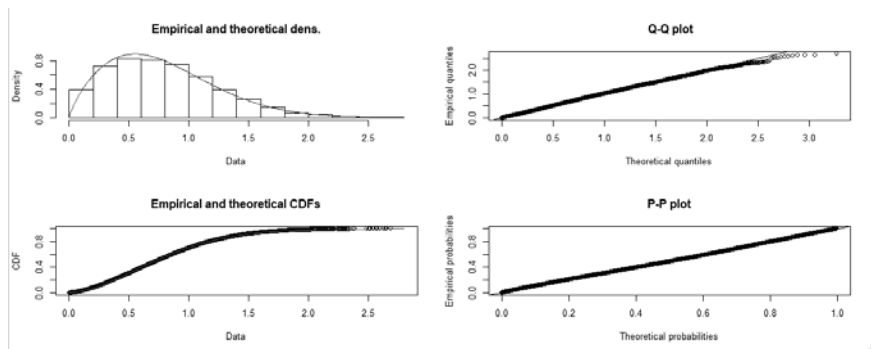


Рис. 5. Розподіл Вейбула.

Висновки

- Створено новий алгоритм для моделювання траєкторій гаусівських випадкових процесів з коваріаційною функцією спеціального вигляду.

- Доведена збіжність скінченновимірних розподілів змодельованого процесу до відповідних розподілів теоретичного.
- У випадку звуження поля Ченцова на чверть кола знайдено швидкість збіжності до нуля похибки у просторі $H_{\text{ср}}$.
- Створено програмну реалізацію відповідного алгоритму мовою R.
- Проведено чисельне моделювання відповідного процесу, якість моделювання якого підтверджено порівнянням емпіричних і теоретичних статистичних характеристик процесу.
- Для змодельованого процесу знайдено емпіричний розподіл максимуму, для якого найкращу апроксимацію дає розподіл Вейбула.

Бібліографічні посилання.

1. Paranjape S. R., Park C. Distribution of the supremum of the two-parameter Yeh-Wiener process on the boundary. *Journal of Applied Probability*. Vol. 10, No. 4 (Dec., 1973), p. 875–880.
2. І.І. Клесов. Про ймовірність досягнення криволінійного рівня вінерівським полем. Теор. ймовірност. та матем. статист. Вип. 51, 1994, с.62-66.
3. Клесов О. І., Круглова Н. В. Розподіл функціоналів типу максимуму для поля Ченцова в R^3 . Наукові вісті НТУУ «КПІ». 2007. № 6. с.145–150.
4. Н.В. Круглова, О.О. Диховичний, І.В. Алексєєва, Н.В. Богданова Про розподіл максимуму поля Ченцова на «сходинах», ММС, 2020, 1, с. 128-139.
5. Dykhovychnyi O. O., Kruglova N. V. Simulation of a gaussian process with correlation function of a special form //International conference" Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes dedicated to the 100th anniversary of I.I. Gikhman. 2018. с. 17-22.
6. L. Doob, Heuristic approach to Kolmogorov-Smirnov theorems, *Ann. Math. Statist.* 20 (1949), p. 393-403.
7. Yeh J. Wiener measure in a Space of Functions of Two Variables. *Transactions of the American Mathematical Society*, № 95.1960. p. 433–450.
8. Allen E.J. *Modeling with Ito Stochastic Differential Equations*, Dordrecht: Springer, 2007, 228 p.
9. URL: <http://cran.us.r-project.org>.
10. Gnedenko B.V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. Math.*, № 44 (1943), p. 423-453.

Статтю подано до редакції 03.11.2020